Université Abdelmalek Essaadi. Ecole Nationale des Sciences Appliquées - Tétouan.

Cycle Classes Préparatoires. 1ère année. S2.

Module : Maths 3 : Analyse 2. M. Cherkaoui

Contrôle continu 1. Mardi 10 mai 2011. (Durée : 2 heures)

Bon travail et bon courage.

Exercice 1 (8 pts)

On considère l'équation différentielle linéaire du 2ème ordre suivante

$$y''(x) + y'(x) + \lambda y(x) = x \exp(x) . \cos(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \text{(E)}$$

1) (3 pts) Donner la solution générale $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_0) (Equation sans second membre)

2) (4 pts : 2,5 pts pour la méthode et 1,5 pts pour le calcul)
Donner une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E) pour $\underline{\lambda = -1}$.

3) (1 pt) En déduire la solution générale $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E) pour $\underline{\lambda = -1}$.

Exercice 2 (7 pts) Soit l'équation différentielle

$$2x(1-x)y'(x) + (1-2x)y(x) = 1 \qquad \text{(E)}$$

1) (1 pt) Normaliser l'équation (E). On notera (N) la nouvelle équation.
Justifier qu'on sera amené à résoudre (N) sur chacun de ces trois intervalles : $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1, +\infty[$.

2) (1,5 pts) Donner la solution générale réelle de (N_0) (Equation sans second membre)

3) (2,5 pts) Donner une solution particulière réelle de (N).

Indication :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \sqrt{ax^2+bx+c}\right| & \text{si} \quad a > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} Arc\sin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

4) (0,5 pt) Donner la solution générale réelle de (N).

5*) (1,5 pts) Etudier la possibilité de raccorder les solutions (de classe C^1) aux points 0 et 1.

Exercice 3 (5 pts) Intégrales de Bertrand

1) (2 pts) Pour tout $a > 1$, on considère l'intégrale généralisée

$$I(\beta) = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^{\beta}}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $I(\beta)$ est convergente si, et seulement, si $\beta > 1$.

2) (3 pts) Pour tout $a > 1$, on considère l'intégrale généralisée

$$I(\alpha, \beta) = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta}}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $I(\alpha, \beta)$ est convergente au voisinage de $+\infty$ si, et seulement, si ($\alpha > 1$, β quelconque) ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). (Indication : penser à utiliser le critère de Riemann)

